Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
— Mise en évidence des résultats
— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1
(Maths B, Banque PT 2025)

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1;+\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)y''=3\left(x^2+x+1\right) \tag{E}$$

On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x+1)y+(2-x)y'-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)y''=0 \tag{H}$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1;+\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (H) sur $]1;+\infty[$.

Partie I

1. Démontrer que $\forall x\in]1;+\infty[$, $3x^2+2x-2\neq 0$.
2. Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1;+\infty[$.

   On admet que S_H est de dimension 2
3. Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1;+\infty[$ par

$$\forall x\in]1;+\infty\left[,\qquad f_1(x)=\frac{1}{x}\right.$$

   est solution de (H) sur $]1;+\infty[$.

Partie II

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. La matrice A est-elle inversible ?
5. Déterminer le noyau de A.
6. Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x = y + 2z$.
7. Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :
$$\mathcal{S}_1 : AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_2 : AX = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
8. Résoudre le système $\mathcal{S}_2 : AX = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \varphi(P) = (3X+1)P + (2-X)P' - \frac{X}{2}\left(3X^2 + 2X - 2\right)P''.$$

9. Calculer $\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right)$.
10. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
11. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
12. En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation
$$\varphi(P) = 3\left(X^2 + X + 1\right).$$

Partie IV

13. Déterminer S_H puis S.

Exercice 2

(Adapté de Ecricome S 2015)

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de v sur I.
   (f) Montrer que :
$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$
2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

Exercice 3
(*E.P.I.T.A. PT 2018*)

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. *Question préliminaire*

   Étudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

   En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2. *Première méthode*

   (a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

   $$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$

   (b) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. *Deuxième méthode*

   (a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geqslant 1$:

   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

   (b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

   $$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$

   En déduire l'inégalité $\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

   (c) Établir la divergence de $(H_n)_{n\geqslant 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   (d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

   Étudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et montrer que $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$.

   En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0,1]$ et la formule :

   $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exercice 4

(Adapté de Maths A, Banque PT 2021)

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

— Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.

— Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.

— Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.

— On a $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$.

Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne au jour n, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \alpha,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = \beta.$$

On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. (a) Calculer p_2 en fonction de p_1.
   (b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$
   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
2. On suppose dans cette question que $p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$.
   (a) Calculer la loi de X_2.
   (b) Calculer la loi du couple (X_1, X_2).
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_1 et de X_2.
   (d) Calculer la covariance entre X_1 et X_2.
   (e) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?